

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу  
Дуплищевой Анастасии Юрьевны  
«Спектральный анализ разностных операторов»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

**1. Актуальность.** В диссертационной работе продолжаются исследования, посвященные разностным операторам, которые проводились О. Перроном, А. Пуанкаре, И.Ц. Гохбергом, И.А. Фельдманом, А.Б. Антоневичем, Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффером, А.Г. Баскаковым, М.С. Бичегкуевым и др. В последние годы в работах А.Г. Баскакова и его учеников особенно важное значение уделялось спектральной теории разностных операторов, используемой в дальнейшем при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами. Разностные операторы играют важную роль не только в математических исследованиях, но и в различных физических приложениях. Спектральной теории разностных операторов как с постоянными, так и с переменными операторными коэффициентами посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных математиков, что говорит об актуальности темы рассматриваемой диссертации и о важности решаемых в ней задач.

**2. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна.** Диссертация состоит из введения, по существу совпадающего с авторефератом, четырех глав основного текста, разбитых на параграфы, списка литературы, охватывающего 110 наименований и насчитывает 99 страниц.

Первая глава «Некоторые сведения из теории операторов» носит вспомогательный характер. Она содержит основные определения и факты о линейных замкнутых операторах, основные теоремы спектральной теории линейных замкнутых операторов и теоремы о разбиении спектра линейных замкнутых операторов.

Основные результаты сформулированы и полностью доказаны в следующих трех главах. Их научная новизна заключается в следующем.

1. Во второй главе «Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка» рассматриваются линейные разностные операторы и уравнения второго порядка в банаховом пространстве  $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , двусторонних последовательностей векторов из комплексного банахова пространства  $\mathfrak{X}$  ( $End \mathfrak{X}$  – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в  $\mathfrak{X}$ ). Приводятся условия их обратимости, фредгольмовости, получено асимптотическое представление решений однородного разностного уравнения и вводится понятие состояний обратимости операторов, позволяющее рассматривать более разнообразную чем общепринятую классификацию спектров.

Приводятся утверждения, которые доказывают каждое из условий, приводимых в определении понятия состояний обратимости операторов и доказана основная во второй главе теорема 2.4.1 о совпадении состояний обратимости рассматриваемых абстрактных операторов. Кроме того, в теореме 2.4.3 получен явный вид для обратного оператора.

Доказана теорема 2.5.1 о совпадении состояний обратимости для вводимых в п. 1 разностных операторов второго порядка, рассматриваемых в банаховом пространстве  $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathfrak{X})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , двусторонних последовательностей векторов из комплексного банахова пространства  $\mathfrak{X}$ . Далее рассматриваются вопросы обратимости и фредгольмовости операторов, в частности, в теореме 2.5.3 установлено условие обратимости разностного оператора, а в теореме 2.5.4 содержится утверждение об одновременной обратимости операторов, рассматриваемых в п. 5. В теореме 2.5.5 найдено условие обратимости рассматриваемого оператора с использованием вводимого понятия характеристической функции. В теоремах 2.5.10 и 2.5.11 приводится условие фредгольмовости для данного оператора. В заключении данного параграфа доказана теорема 2.5.12, в которой получено асимптотическое представление ограниченных решений однородного разностного уравнения второго порядка.

2. В третьей главе «О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка» в банаховом пространстве  $L^p$  суммируемых со степенью  $p \in [1, \infty)$  на промежутке  $\mathbb{R}$  классов функций рассматриваются специального вида линейные дифференциальные операторы и уравнения второго порядка. Приводятся условия их одновременной обратимости и одновременной замкнутости образов, установлено наличие изоморфизма ядер рассматриваемых операторов. Основные результаты данной главы получены с помощью сопоставления исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка и последующего использования теории дифференциальных операторов первого порядка, определяемых этой операторной матрицей.

3. В четвертой главе «О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений» в банаховом пространстве равномерно непрерывных и ограниченных функций, определенных на  $R$  и со значениями в конечномерном линейном нормированном пространстве  $X$ , рассматриваются разностные уравнения первого порядка с постоянными операторными коэффициентами. С помощью теории гармонического анализа исследуется качественная структура решений таких уравнений. В частности, доказаны теорема 4.1.1 о качественной структуре равномерно непрерывных ограниченных решений рассматриваемого разностного уравнения и теорема 4.4.1 о достаточном условии существования ограниченных непрерывных решений этого же уравнения.

**3. Стиль изложения и полнота отражения результатов диссертационного исследования в публикациях.** Изложение результатов диссертационной работы ясное и подробное. В библиографии хорошо изложена история рассматриваемой проблемы. Все основные результаты являются новыми и строго доказанными методами спектральной теории линейных операторов. Содержание автореферата правильно отражает положения диссертации. Основные результаты диссертационного исследования в полной мере представлены в четырнадцати научных работах, из них пять опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ.

**4. Соответствие диссертации паспорту специальности.** Диссертация соответствует квалификационным требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней и требованиям паспорта специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

**5. Замечания.** Замеченные оппонентом погрешности изложения.

1. В главе 2 автор использует подход, основанный на использовании сопряженных операторов, не указывая при этом области определения рассматриваемых операторов и не делая предположения об их плотности.

2. При описании методов исследования в автореферате неудачно составлена фраза: «Для исследования спектральных свойств рассматриваемых операторов (а в работе рассматриваются именно дифференциальные и разностные операторы!) используется спектральная теория дифференциальных и разностных операторов», а в диссертации в определении 2.2.2 неудачна фраза «...конечномерно одно из чисел...».

3. В автореферате при изложении результатов главы 3 пропущена теорема 3.2.1 — основной результат о разрешимости дифференциального уравнения (6).

4. В автореферате и в диссертации ссылки на публикацию [7], соответственно [49], приведены неточно.

5. В диссертации в списке литературы имеются источники, на которые в тексте отсутствуют обращения, например, [35], [39].

Стоит отметить, что указанные недочеты являются легко устранимыми и не влияют на общее положительное впечатление от работы.

Считаю, что диссертация Дуплищевой Анастасии Юрьевны «Спектральный анализ разностных операторов» представляет законченную научно-исследовательскую работу, в полной мере отвечающую всем критериям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней и соответствует специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор Дуплищева Анастасия Юрьевна безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

22 июля 2015 года

Доктор физико-математических наук, профессор  
федерального государственного автономного  
образовательного учреждения высшего  
профессионального образования «Белгородский  
государственный национальный  
исследовательский университет»

А.В. Глушак

